

# Zur Ableitung der Unbestimmtheitsrelation am Einzelspalt<sup>1</sup>

Rainer Müller und Hartmut Wiesner

*Sektion Physik der Universität München, Schellingstr. 4, D-80799 München*

## 1 Einleitung

Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \quad (1)$$

wird allgemein als eine zentrale Aussage der Quantenmechanik angesehen. Sie ist daher fester Bestandteil aller Unterrichtskonzepte zur Quantenmechanik und fehlt in keinem Schulbuch zu diesem Thema. In [1] wurde die Unbestimmtheitsrelation ausführlich unter dem Aspekt ihrer Interpretation diskutiert und es wurde aufgezeigt, wie vielfältig das Spektrum der verschiedenen möglichen Ansichten zum Verständnis von (1) ist.

Ebenso wichtig für die Vermittlung der Unbestimmtheitsrelation in der Schulpraxis ist es jedoch, geeignete Wege zu ihrer Herleitung und Veranschaulichung aufzuzeigen. Eine theoretisch saubere Ableitung der Ungleichung (1) aus den Kommutatorrelationen zwischen Ort und Impuls ist für die Behandlung in der Schule zu aufwendig und würde für das Verständnis der zugrundeliegenden Physik auch wenig bringen. Man ist also auf Beispiele und heuristische Überlegungen angewiesen. Hier zeigt sich allerdings, daß vielen dieser Illustrationen implizit klassische Vorstellungen (wie etwa feste Bahnen) zugrundeliegen. Es besteht die Gefahr, daß dadurch das Denken in klassischen Kategorien noch gestärkt wird, was natürlich der didaktischen Absicht diametral zuwiderliefe.

Die wichtigsten Ansätze zur heuristischen Demonstration der Unbestimmtheitsrelation wurden in [2] dargestellt. In diesem Beitrag soll speziell die Herleitung am Einzelspalt diskutiert werden. Sie gehört zu den verbreitetsten Ansätzen und die problematischen Aspekte treten hier ganz besonders zutage. Im folgenden soll in Abschnitt 2 die übliche Form der Einzelspalt-Herleitung kritisch analysiert und die Gefahr von klassischen Fehlvorstellungen aufgezeigt werden. In Abschnitt 3 wird dann eine wellenmechanische Ableitung gegeben, die nicht auf dem klassischen Bahnbegriff beruht und die Konsequenzen für den Unterricht diskutiert.

## 2 Übliche Form der Einzelspalt-Ableitung

Das Gedankenexperiment, das üblicherweise betrachtet wird, ist in Abb. 1 skizziert. Elektronen mit festem Impuls  $\vec{p}_0$  in  $y$ -Richtung treffen auf eine Blende mit einem Spalt der Breite  $d$ . Auf dem Schirm zeigt sich die charakteristische Beugungsfigur. Das Hauptmaximum befindet sich direkt hinter dem Spalt, die Interferenzminima 1. Ordnung findet man bei einem Winkel, der

$$\sin \alpha = \lambda/d \quad (2)$$

erfüllt, wobei  $\lambda = h/p_0$  die dem Impuls  $p_0$  zugeordnete de-Broglie-Wellenlänge ist.

---

<sup>1</sup>Erscheint in: Didaktik der Physik, Vorträge der DPG-Frühjahrstagung, Berlin (1997).

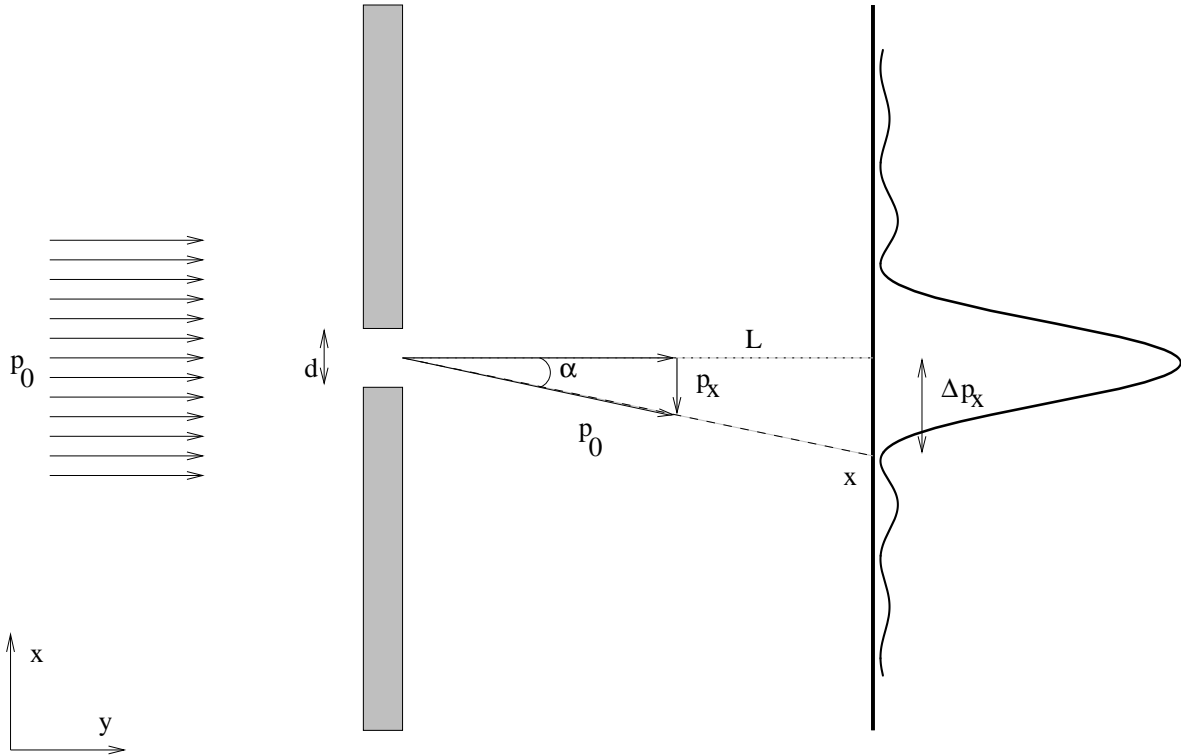


Abbildung 1: Geometrie des Einzelspalt-Experiments

Beim Durchgang durch den Spalt verringert sich die Orts-Unbestimmtheit des Elektrons in  $x$ -Richtung. Das Auftreten der Beugungsfigur wird so gedeutet, daß sich dadurch die Unbestimmtheit im Impuls vergrößert, daß also das Elektron mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine von Null verschiedene Impulskomponente  $p_x$  besitzt. Zur quantitativen Herleitung der Unbestimmtheitsrelation muß das Beugungsmuster auf dem Schirm mit der Impulsverteilung der Elektronen am Spalt in Zusammenhang gebracht werden (denn nur die Streuung der Impulse direkt am Spalt ist von Interesse).

Nach der üblichen Argumentationsweise wird für die Ortsunbestimmtheit die Spaltbreite eingesetzt:  $\Delta x = d$ . Die Streuung  $\Delta p_x$  der Impulse in  $x$ -Richtung wird durch die Abweichung vom einlaufenden Impuls  $p_x = 0$  definiert. Als Abschätzung für den typischen Querimpuls wird die Lage des ersten Minimums benutzt. Dazu wird einem Elektron, daß dort auf den Schirm trifft, anhand der geometrischen Konstruktion in Abb. 1 die Impulskomponente  $p_x = p_0 \sin \alpha$  senkrecht zum Schirm zugeordnet. Durch Einsetzen von (2) erhält man  $p_x = h/d$  und es ergibt sich die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim h.$$

Der schwache Punkt bei dieser Argumentation liegt in der Abschätzung der Querimpulskomponente  $p_x$ . Denn die Argumentation, die zu dieser Abschätzung führt, ist nur dann verständlich, wenn man (zumindest gedanklich) dem Elektron eine gerade Bahn zwischen Spalt und Schirm zuordnet, wie in Abb. 1 durch die gestrichelte Linie angedeutet. Die graphische Konstruktion, die ohne eine solche Annahme nicht verständlich ist, verstärkt diesen Eindruck noch. Die Fehlvorstellung einer klassischen Bahn, die im Unterricht nur sehr schwer zu überwinden ist, wird mit einem solchen Beispiel noch gefördert.

Nicht nur von der didaktischen Seite, sondern auch vom Standpunkt der Quantenmechanik

ist die Zuordnung eines festen Impulses zu einem Teilchen, das an einer bestimmten Stelle auf den Schirm trifft zumindest fragwürdig. Denn die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation, die mit dieser Argumentation abgeleitet werden soll, sagt ja gerade aus, daß die Elektronen hinter dem Spalt *keinen* festen Impuls besitzen. Im folgenden Abschnitt soll gezeigt werden, wie man auch ohne Zuhilfenahme des klassischen Bahnbegriffs, mit rein wellenmechanischen Methoden, die Impulsverteilung der Elektronen am Spalt erschließen kann.

### 3 Impulsverteilung und Interferenzmuster beim Einzelspalt

Das Problem liegt darin, aus der Intensitätsverteilung auf dem Schirm die Streuung der Impulse in der Spaltebene zu erschließen. Das heißt, es muß eine Verknüpfung zwischen der Impulsverteilung der Elektronen am Spalt und ihrer Ortsverteilung auf dem Schirm gefunden werden. Daß ein solcher Zusammenhang bestehen muß, läßt sich mit qualitativen Argumenten verdeutlichen: Am Spalt wird ein Wellenpaket präpariert, dessen Impulsverteilung in transversaler (also  $x$ -) Richtung wir feststellen möchten. Wie alle Wellenpakete zerfließt auch dieses auf dem Weg zum Schirm. Entscheidend sind nun die Fourier- (also Impuls-)komponenten, aus denen es sich zusammensetzt. Wellenpakete, die große, stark unterschiedliche Impulskomponenten enthalten, zerfließen schneller als solche mit kleinen Impulskomponenten. Die Ausbreitung der Impulskomponenten führt dazu, daß die Verteilung der Impulse sich als ein räumliches Muster auf dem Schirm zeigt, wenn dieser weit genug vom Spalt entfernt ist. Man kann die freie Ausbreitung des Wellenpakets und den Nachweis auf dem Schirm also als eine Messung der Impulsverteilung am Spalt ansehen.

Dieser qualitative Zusammenhang läßt sich auch quantenmechanisch herleiten. Um das Problem zu vereinfachen, verfolgen wir nur die Ausbreitung der Wellenfunktion in  $x$ -Richtung. Wir wollen von der detaillierten Beschreibung der Bewegung zum Schirm hin (in  $y$ -Richtung) absehen und einfach annehmen, daß sie nach den üblichen Wellengesetzen erfolgt. Zur Berechnung des Interferenzmusters auf dem Schirm fragen wir einfach nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Elektronen in  $x$ -Richtung zu einer bestimmten Zeit  $t$ , zu der die Welle am Schirm angekommen sein soll.

Die kastenförmige Wellenfunktion direkt hinter dem Spalt zur Zeit  $t_0$  bezeichnen wir mit  $\psi_{\text{Spalt}}(x, t_0)$ . Eigentlich sind wir an der Impulsverteilung in der Spaltebene interessiert. Sie läßt sich am besten durch die Fouriertransformierte  $\phi_{\text{Spalt}}(p, t_0)$  der Wellenfunktion ausdrücken (der Einfachheit halber schreiben wir  $p$  statt  $p_x$ ; der Index Spalt bzw. Schirm verdeutlicht das Zeitargument  $t_0$  bzw.  $t$ ):

$$\phi_{\text{Spalt}}(p, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{i}{\hbar} px} \psi_{\text{Spalt}}(x, t_0). \quad (3)$$

$\phi(p)$  heißt auch Wellenfunktion in der Impulsdarstellung. Ihr Betragsquadrat gibt die Wahrscheinlichkeit an, den Impuls  $p$  bei einer Messung in der Spaltebene zu finden. Auf ihre genaue Form kommt es bei dem Argument nicht an.

Für die freie Bewegung zwischen Spalt und Schirm tritt im Hamiltonoperator nur die kinetische Energie auf:  $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$ . In diesem Fall nimmt die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t)$$

in der Impulsdarstellung die einfache Gestalt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(p, t) = \frac{p^2}{2m} \phi(p, t)$$

an, wobei  $p$  kein Operator, sondern eine gewöhnliche Zahl ist. Die Lösung kann man sofort hinschreiben:

$$\phi(p, t) = \text{const } e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t-t_0)}.$$

Mit der Anfangsbedingung

$$\phi(p, t_0) = \phi_{\text{Spalt}}(p, t_0)$$

erhält man

$$\phi_{\text{Schirm}}(p, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t-t_0)} \phi_{\text{Spalt}}(p, t_0).$$

Diese Formel liefert die Impulsverteilung zur Zeit  $t$  (also am Schirm). Eigentlich sind wir aber an der räumlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung (in Abhängigkeit von dem Impulswert) auf dem Schirm interessiert, die ja letztlich das dort sichtbare Interferenzmuster beschreibt. Wir müssen also zur Orts-Wellenfunktion zurücktransformieren, was durch die Umkehrung der Fouriertransformation (3) geschieht:

$$\psi_{\text{Schirm}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{+\frac{i}{\hbar} px} \phi_{\text{Schirm}}(p, t_0).$$

Das ergibt:

$$\psi_{\text{Schirm}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(\frac{i}{\hbar} px - \frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t-t_0)\right) \phi_{\text{Spalt}}(p, t_0). \quad (4)$$

Diese Gleichung erfüllt den beabsichtigten Zweck: Sie verknüpft die räumliche Verteilung der Elektronen auf dem Schirm (zur Zeit  $t$ ) mit der Impulsverteilung in der Spaltebene (zur Zeit  $t_0$ ).

Es verbleibt noch die Aufgabe, das kompliziert aussehende Integral in (4) zu lösen. Es hat die Form

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{if(p)} \phi_{\text{Spalt}}(p, t_0).$$

Für Integrale dieser Form gibt es eine Standardmethode zur näherungsweise Auswertung: die Methode der stationären Phase [3]. Sie beruht auf der Tatsache, daß nicht alle  $p$ -Werte aus dem Integrationsintervall gleichermaßen beitragen: Wenn sich die Funktion  $f(p)$  über ein kleines  $p$ -Intervall stark ändert, oszilliert die Exponentialfunktion stark, so daß das Integral über dieses Teilintervall fast Null wird und es nichts zum Gesamtintegral beiträgt. Die einzigen nennenswerten Beiträge kommen aus den Regionen, wo sich die Funktion  $f(p)$  nur schwach ändert, wo also  $f'(p) = 0$  wird. Diese Gegenden des Integrationsintervalls nennt man die Punkte der stationären Phase.

Bei unserem Problem können wir mit dieser Methode bestimmen, welche Impulskomponenten am Spalt hauptsächlich zum Interferenzbild am Ort  $x$  auf dem Schirm beitragen. Die Phase im Integral (4) ist

$$f(p) = \frac{1}{\hbar} \left( px - \frac{p^2}{2m}(t-t_0) \right).$$

Der Punkt  $p_s(x)$ , an dem  $f'(p_s)$  verschwindet, ist:

$$p_s(x) = \frac{mx}{t-t_0}.$$

Wir können das noch umformen, indem wir die Zeitdifferenz  $t-t_0$  durch den Abstand  $L$  zwischen Spalt und Schirm und den Impuls der einlaufenden Welle  $\vec{p}_0$  ausdrücken:  $|\vec{p}_0|/m \approx L/(t_1-t_0)$ . Dabei ist angenommen worden, daß sich die Wellenfronten in  $y$ -Richtung auch hinter dem Spalt

nahezu ungestört ausbreiten. Zwar wird die Wellenfunktion hinter dem Spalt eigentlich die Form einer zylindrischen Welle aufweisen; für die kleinen Winkel, die wir hier betrachten ist diese Annahme aber sicher zulässig. Es ergibt sich

$$p_s(x) = |\vec{p}_0| \frac{x}{L} \approx |\vec{p}_0| \sin \alpha.$$

Dies ist die gleiche Beziehung zwischen Impuls und Ort auf dem Schirm, die oben anhand der geometrischen Konstruktion in Abb. 1 hergeleitet wurde.

Im Prinzip ist damit unser Ziel erreicht. Wir haben festgestellt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron am Ort  $x$  auf dem Schirm auftritt, fast vollständig durch eine bestimmte Impulskomponente in der Spaltebene festgelegt ist. In diesem Sinn ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Schirm ein Abbild der Impulsverteilung am Spalt. Der Ort, dessen Schwärzung die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Impulskomponente anzeigt, ist mit dem zugehörigen Impuls durch die klassische Beziehung verbunden, die sich aus Abb. 1 mit der Annahme einer geradlinigen Bahn ergibt. Es muß jedoch noch einmal betont werden, daß dieses Ergebnis auf quantenmechanische Weise mit reinen Wellenvorstellungen abgeleitet wurde, ohne daß von der Vorstellung einer klassischen Bahn Gebrauch gemacht wurde.

Es ist auch möglich, mit der Methode der stationären Phase noch weiterzugehen und einen Näherungsausdruck für das Integral (4) zu ermitteln. Dazu entwickelt man die Phase in der Exponentialfunktion bis zur zweiten Ordnung. Wenn man annimmt, daß die Funktion  $\phi(p)_{\text{Spalt}}$  sich am Punkt  $p_s$  der stationären Phase nur langsam ändert, kann man das Integral auswerten und erhält allgemein [3]:

$$\psi_{\text{Schirm}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{if(p)} \phi_{\text{Spalt}}(p, t_0) \quad (5)$$

$$\approx \sqrt{\frac{2\pi}{i\hbar R}} \exp(iS) \phi_{\text{Spalt}}(p_s(x), t_0), \quad (6)$$

wobei  $S = f(p = p_s(x))$  und  $R = -f''(p = p_s(x))$ . Setzt man die konkreten Werte, also  $R = (t - t_0)/(\hbar m)$  und  $S = mx^2/(2\hbar(t - t_0))$  für unser Problem ein, erhält man

$$|\psi_{\text{Schirm}}(x, t)|^2 = \frac{2\pi m}{t - t_0} |\phi_{\text{Spalt}}(p_s(x), t_0)|^2.$$

Man kann das Ergebnis dieser quantenmechanischen Rechnung folgendermaßen zusammenfassen: Die Wahrscheinlichkeit, am Ort  $x$  auf dem Schirm ein Elektron zu finden, ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, am Spalt ein Elektron mit dem Impuls  $p_x$  zu finden, wobei  $x$  und  $p_x$  über die „klassische“ Beziehung  $p_x = p_0 x/L = p_0 \tan \alpha \approx p_0 \sin \alpha$  zusammenhängen. Die Verbindung zwischen Impulsverteilung in der Spaltebene und der Intensitätsverteilung des Beugungsbildes auf dem Schirm läßt sich nach der obigen Rechnung folgendermaßen ausdrücken:

$$|\psi_{\text{Schirm}}(x)|^2 \sim \left| \phi_{\text{Spalt}} \left( p_x = \frac{p_0 x}{L} \right) \right|^2. \quad (7)$$

Die quantitative Analyse zeigt somit, daß die Annahme einer klassischen Bahn zwischen Spalt und Schirm zwar das richtige Ergebnis liefert. Damit ist aber nicht gesagt, daß mit einer solchen Vorstellung unbedenklich weiter argumentiert werden darf. Im Gegenteil: Man sollte höchste Vorsicht walten lassen, bei den Schülerinnen und Schülern nicht die Vorstellung von klassischen Bahnen aufkommen zu lassen. Eine prinzipielle Möglichkeit, dies zu vermeiden, stellt die hier und im Anhang angegebene quantenmechanische Begründung dar, die mit einer reinen Wellenvorstellung arbeitet. Für den Gebrauch in der Schule ist die quantitative Analyse

sicherlich zu kompliziert. Ein gangbarer Weg besteht aber darin, das Problem anzusprechen und seine Auflösung mit qualitativen Argumenten anschaulich zu erläutern. Will man sich auf eine solche Diskussion im Unterricht nicht einlassen, kann einen der alternativen Ansätze zur Demonstration der Unbestimmtheitsrelation wählen, die in [2] diskutiert wurden.

## Literatur

- [1] R. Müller, H. Wiesner, *Die Interpretation der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation*, erscheint in Physik in der Schule (1997).
- [2] R. Müller, H. Wiesner, *Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation im Unterricht*, erscheint in Physik in der Schule (1997).
- [3] C. Eckart, *The Approximate Solution of One-Dimensional Wave Equations*, Rev. Mod. Phys. **20**, 399 (1948).