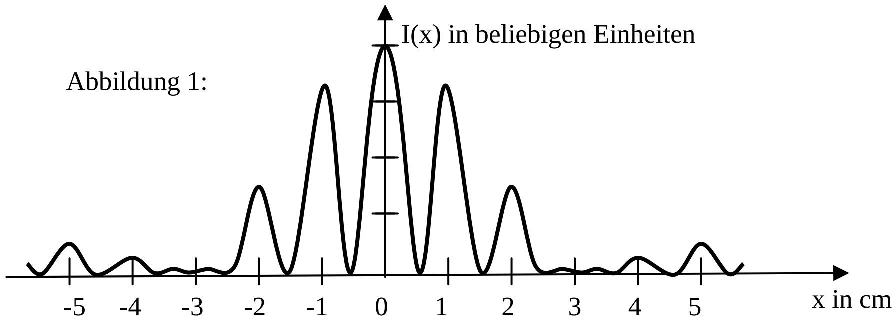
Die Aufgabe:

a) Das parallele Licht einer Natriumdampflampe (Wellenlänge 589 nm) fällt senkrecht auf einen Doppelspalt. In der Entfernung y = 4,0 m wird ein Intensitätsdiagramm I(x) parallel zum Doppelspalt aufgenommen. Man erhält das Schaubild in Abbildung 1:

Abbildung 1:



- Erklären Sie in einem geeigneten Modell das Zustandekommen der Minima bei x = ±0,5 cm. Woher kommt das Minimum für x = ±3,0 cm?
- Berechnen Sie möglichst genau den Abstand d der Spaltmitten des Doppelspalts und die Breite a der beiden Einzelspalte. (Dazu können Sie auch Informationen aus dem Schaubild entnehmen.)
- Nun werde der Doppelspalt durch einen weiteren Doppelspalt mit Spaltabstand 0,5·d und Spaltbreite 0,75·a ersetzt. Skizzieren Sie das zugehörige I(x)-Schaubild. (x-Achse: 1cm entspricht 1cm; y-Achse: beliebige Einheiten).

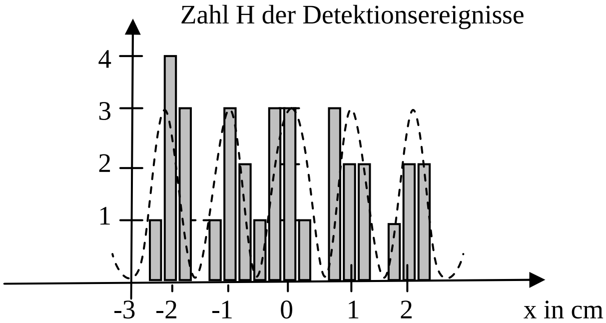
b) Nun werde die Intensität der Natriumlampe durch Graufilter so weit verringert, dass in der Beobachtungsebene nur mehr einzelne Photonen registriert werden.

- Wie groß ist die Energie eines einzelnen Photons?

Der Doppelspalt von Aufgabe a) werde durch einen Doppelspalt ersetzt dessen Einzelspaltbreiten a sehr viel kleiner als der Spaltabstand d seien.

Durch diese Anordnung werden nun 34 Photonen geschickt und in der Detektionsebene nachgewiesen. Das Histogramm in Abb- 2 zeigt die Zahl der Detektionsereignisse in Abhängigkeit von x. Die Ortsauflösung des Detektors beträgt 0,25cm. Z.B. werden im 0,25cm-Bereich um x_1 = 1,0cm zwei Photonen nachgewiesen, d.h. H(1cm) =2.

Abbildung 2:



- Wie kann es sein, dass außerhalb eines Maximums mehr Photonen nachgewiesen werden, als in einer Maximumsstelle: $H(x_1) = 2 < H(0{,}75\text{cm}) = 3$?
- Was erwarten Sie bzgl. $H(x_1)$ und H(0,75cm), wenn man statt 34 Photonen 340 Photonen durch die Anordnung schickt? Begründung! (Ev: Zeichnen Sie eine typische H(x)-Kurve!)
  Welches Verhältnis erwarten Sie für $H(x_1)$/H(0,75cm), wenn 34 Millionen Photonen durch die Anordnung geschickt werden?

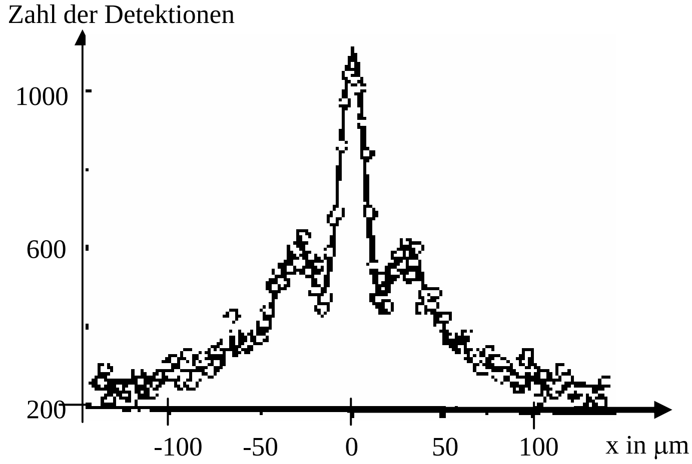
c) Leicht veränderter Auszug aus einem Artikel in den „Physikalischen Blättern“ Jahrgang 2000/56 von Prof. M. Arndt und Prof. A. Zeilinger von der Universität Wien:

„In einem Experiment in unserer Gruppe in Wien haben wir vor kurzem Interferenzen von de-Broglie-Wellen der Fullerene C_{60} bei Beugung an einem materiellen Gitter beobachtet. Dabei traten die Moleküle aus einem Ofen, der auf einer Temperatur von rund 900 K gehalten wurde, und zwar mit einer breiten Geschwindigkeitsverteilung mit einem Maximum bei 200 m/s.

Gebeugt wurden die Fullerene durch ein Gitter in einer Entfernung von etwa 1,2 m hinter dem Ofen. Das Gitter bestand aus einer freitragenden SiN_x-Struktur mit 50 nm breiten Spalten und einer Periode [= Gitterkonstante] von 100 nm. Der Detektor war 1,25 m hinter dem Gitter angebracht und hatte eine Ortsauflösung von etwa 5 μm. [Der Detektor konnte parallel zum Gitter verschoben werden und registrierte einzelne Fullerenmoleküle.] Ein experimentelles Beugungsbild ist in Abb. 3. wiedergegeben. [Aufgetragen ist die Zahl der Detektionen eines einzelnen Fullerens in Abhängigkeit von der Detektorposition]. Man sieht deutlich die Beugungsmaxima erster Ordnung rechts und links vom zentralen Maximum. Die Kurve wird recht gut von dem Wellenmodell reproduziert, wenn man die Geschwindigkeitsverteilung des Strahls berücksichtigt.“

(Einfügungen in eckigen Klammern von mir)

Abbildung 3:



- Berechnen Sie mit Hilfe der Daten, die in Text und Schaubild gegeben sind, so genau wie möglich die de-Broglie-Wellenlänge und die Masse der verwendeten Fulleren-Moleküle.
- Zeigen Sie, dass mit der gegebenen Anordnung die Maxima 2. Ordnung nicht beobachtet werden konnten.
- Inwiefern weicht die Kurve von der theoretisch nach dem Wellenmodell erwarteten Intensitätskurve eines Gitters ab und wie kann man die beobachtete Abweichung durch die Geschwindigkeitsverteilung der Fullerene erklären?
- Welche Beobachtung bei diesem Experiment spricht dagegen, sich die Fullerene als Welle vorzustellen?

Lösung

a)

Im Wellenmodell überlagern sich die Lichtwellen aus den zwei Spalten gemäß dem Huygens-Prinzip.

An der Stelle x = 0,5 cm ist der Gangunterschied der zwei Elementarwellen aus den beiden Spalten gerade $\lambda/2$, die elektrischen Feldvektoren addieren sich zu Null.

Dem reinen Doppelspaltmuster überlagert ist das Einzelspaltmuster. Dort wo das Einzelspaltmuster Minima hat, wird das Doppelspaltmuster unterdrückt. Offensichtlich erscheint für x = 3cm das erste Einzelspalt-Minimum, sodass das 3. Maximum unterdrückt ist.

Beim Doppelspalt treten Maxima auf, wenn die Bedingung $\lambda/d = x/y$ erfüllt ist.

Man erhält: $d = \frac{\lambda \cdot y}{x} = \frac{589\,\text{nm} \cdot 4\,\text{m}}{1{,}0\,\text{cm}} = 0{,}24\ \text{mm} \cdot$

Beim Einzelspalt treten Minima auf, wenn die Bedingung $\lambda/a = x/y$ erfüllt ist.

Weil das 2. Minimum für x = 3,0 cm auftritt, muss a = d/3 = 0,079 mm sein.

Die Abstände der Maxima verdoppeln sich, die Abstände der Einzelspaltmimina sind mal 4/3 zu nehmen. Dadurch wird jedes zweite DS-Maximum durch ein ES-Minimum unterdrückt.

b)

Die Energie eines Photons ist $E = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}0 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{589\ \text{nm}} = 3{,}3 \cdot 10^{-19}\,\text{J} = 2{,}1\,\text{eV}$

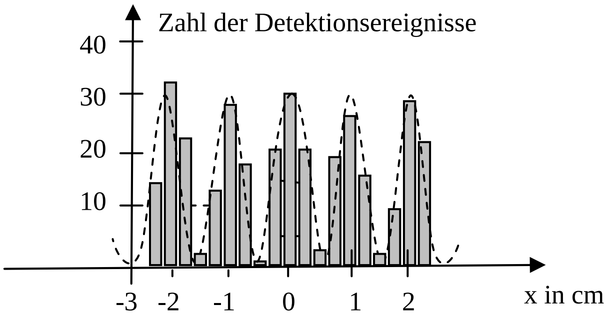
Die gestrichelte Kurve gibt die ortsabhängige Wahrscheinlichkeit P(x) an, ein Photon an einem Ort x zu detektieren.

Der Auftreffort eines einzelnen Photons ist durch den Zufall bestimmt. Es kann praktisch überall auftreffen. Allerdings ist P(x) proportional zur Intensität I(x). So ist die Wahrscheinlichkeit am Ort x = 1cm aufzutreffen doppelt so groß, wie jene, am Ort x = 0,75cm aufzutreffen. Allerdings nähert sich die Häufigkeitsverteilung erst bei sehr vielen Wiederholungen des Experiments an P(x) an. So ist es bei wenigen Wiederholungen nicht sehr wahrscheinlich, aber durchaus möglich, dass für x = 0,75cm 3 Photonen registriert werden, im Maximum aber nur 2.

Wenn man also 340 Photonen durch die Anordnung schickt, so werden sich ihre Detektionsorte eher gemäß P(x) verteilen, aber immer noch statistische Schwankungen aufweisen, also z.B. $H(x_1) = 32$ und H(0,75cm) = 13.

Bei 34 Millionen Photonen wird $H(x_1)$/H(0,75cm) sehr nahe dem Wert $P(x_1)$/P(0,75cm) sein und dieses Verhältnis ist 0,5. (Begründung mit dem Zeigermodell: Gangunterschied für x= 0,75 cm ist ¾ π. Also stehen die zwei zugehörigen Zeiger senkrecht aufeinander. Folglich ist die Summenlänge $\sqrt{2}$, also das Quadrat der Summenlänge ist 2. Dagegen sind die Einzelzeiger für x_1 kollinear, also die Zeigersumme ist 2, das Quadrat 4. Das Verhältnis der Quadrate, das ja das Verhältnis der Intensitäten wiedergibt, ist also 1 : 2.)

Eine typische H(x)-Kurve bei ca. 340 Photonen.



c)
Die Gitterkonstante beträgt 100 nm, y = 1,25 m, x_1 = 30 µm
$\lambda/d = x/y$

$$\lambda = \frac{d \cdot x}{y} = \frac{100\,\mathrm{nm} \cdot 30\,\mu\mathrm{m}}{1{,}25\,\mathrm{m}} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

DeBroglie-Wellenlänge $\lambda = h/p$ also $m = \frac{h}{\lambda \cdot v} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} \cdot 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1{,}4 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{kg}$

Da die Breite eines Spalts halb so groß ist wie die Gitterkonstante, ist der Abstand des ersten Einzelspaltminimums doppelt so groß wie der Abstand des ersten Gittermaximums. Mit anderen Worten: Das erste Einzelspaltminimum unterdrückt das zweite Gittermaximum.

Theoretisch müsste das erste Gitterminimum ein Minimum mit Wert 0 sein, d.h. etwa bei x = 35 µm dürften so gut wie keine Fullerene nachgewiesen werden. Tatsächlich wird etwas mehr als die Hälfte des Werts vom 1. Maximum erreicht. Erklären kann man dies mit der Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle. Die Geschwindigkeit streut breit um den Wert 200 m/s. Ebenso breit streut also auch die deBroglie-Wellenlänge um den Wert 2,4 pm; damit streut natürlich auch der Ort x_1 der zugehörigen 1. Maxima, wie auch der Minima. Bei doppelter Geschwindigkeit wäre z.B. die deBroglie-Wellenlänge halb so groß, und damit der Ort des 1. Maximums genau bei 15µm, also dort, wo man das Minimum erwarten würde.

Gegen die Wellenvorstellung spricht, dass die Fullerenmoleküle immer als Ganzes detektiert werden. Im Wellenmodell müsste auch ein einzelnes Molekül gemäß der I(x)-Kurve verschmiert auf der Detektionsfläche aufkommen.

